Introducción a la Teoría de Juegos

Pares Ordenados Edición Otoño 2023

Mentor: O'Bryan Cardenas Andaur
Aprendiz: Emmanuel David Silva Amaya

15 de diciembre de 2023

Resumen

En el presente texto expositivo se presentará una versión matemáticamente formal de las principales definiciones y resultados de la teoría de juegos. Se hará énfasis en la discusión sobre los supuestos de estos modelos y su relación con la realidad. Se presentarán ejemplos con el objetivo de clasificar e identificar los juegos, haciendo uso de herramientas de la teoría de probabilidad y de la matemática discreta (árboles, grafos).

1. Motivación

Cuando los jugadores se hayan ido,
cuando el tiempo los haya consumido,
ciertamente no habrá cesado el rito.

En el Oriente se encendió esta guerra
cuyo anfiteatro es hoy toda la Tierra.
Como el otro, este juego es infinito. [2]

¿Qué tienen en común el ajedrez, una subasta, una guerra, la elección de un proveedor de internet y las coaliciones de gobierno luego de unas elecciones? Todas estas actividades humanas pueden pensarse como *juegos*. Hay unos bandos delimitados, un escenario de interacción, unas acciones autorizadas, un conjunto de reglas, unos turnos y un resultado que puede ser beneficioso. Si nos permitimos entender un juego de manera intuitiva como este tipo de actividad, entonces descubriremos que este concepto aparece de forma ubicua en el accionar humano.

Surgen así varias preguntas: ¿Podremos dar una definición rigurosa de la noción de juego?, ¿podremos estudiar estos objetos en abstracto?, ¿conviene hacerlo?, ¿podremos encontrar aplicaciones de este estudio en contextos de la vida real?

Brindaremos las respuestas a estas preguntas introduciendo los conceptos principales de la teoría de juegos, fundada por John Von Neumann y Oskar Morgenstern con el objetivo de formalizar la toma interactiva de decisiones.

Antes de buscar un *modelo* de las acciones humanas, debemos analizar las restricciones que esto trae metodológicamente. Implícitamente asumimos que el comportamiento humano es explicable mediante un modelo y obedece a leyes que podemos determinar. Lo anterior puede sonar altamente positivista e ingenuo, sin embargo, es común en las

matemáticas realizar asunciones controversiales. Surge así un dilema disciplinar. Con el objetivo de buscar describir de la mejor forma posible un fenómeno tenemos dos opciones: o bien construimos un modelo simple, computable, que abstraiga las características principales, o en búsqueda de mayor exactitud aumentamos la precisión del modelo pudiendo caer en la trampa de hacerlo tan complicado como la realidad misma.
Nuestro objetivo será definir propiamente el concepto de Juego. Junto con las caracterizaciones matemáticas de los conceptos, discutiremos las asunciones efectuadas en este modelo clásico, con el objetivo de debatir cuán intuitivas estas son, y cómo simplifican (o complican, o sobresimplifican) el fenómeno en cuestión.

2. Teoría de la utilidad

2.1. Preferencia sobre resultados

Antes de estudiar las interacciones entre jugadores, conviene centrarse en el comportamiento de un solo jugador. Desde la teoría de la decisión se pueden estudiar las preferencias que este tiene respecto al conjunto de resultados posibles de un juego. Es claro que esta preferencia no se da en general en el mismo grado. No es igual de satisfactorio para un país ganar una guerra que perderla. Tampoco es igual de apetecible ganar un millón de doláres que ganar un dólar. Entendiendo así que hay diversos grados de preferencia en los que se pueden clasificar los resultados de un juego, podemos definir sobre el conjunto de posibles resultados una noción de predilección para cada jugador. Esto corresponde rigurosamente al concepto matemático de *relación.*

Definición 2.1 (Relación de preferencia) *Una relación de preferencia del jugador i sobre un conjunto O de resultados es una relación binaria denotada por $\succeq_i$.*

La semejanza en notación con la relación de orden $\geq$ de los números reales no es gratuita. Del mismo modo que a partir de $\geq$ obtenemos $=$ y $>$, a partir de la relación $\succeq$ podemos definir $\approx$ y $\succ$. La primera, dará una noción de equivalencia para la acción de preferir; la llamaremos indiferencia. La segunda dará una noción de preferencia con mayor severidad; la llamaremos preferencia estricta.

Definición 2.2 (Relación de indiferencia) *Dada una relación de preferencia sobre O, un conjunto de resultados, definimos la relación de indiferencia $\approx_i$ del jugador i sobre el conjunto O así:*

$$x \approx_i y \quad \Leftrightarrow \quad x \succeq_i y \wedge y \succeq_i x.$$

Definición 2.3 (Relación de preferencia estricta) *Dada una relación de preferencia sobre O, un conjunto de resultados, definimos la relación de preferencia estricta $\succ_i$ del jugador i sobre el conjunto O así:*

$$x \succ_i y \quad \Leftrightarrow \quad x \succeq_i y \wedge y \not\succeq_i x$$

Las relaciones anteriores pueden obedecer en la realidad a muchos factores. Por ejemplo, a esquemas culturales o características propias de la personalidad de cada jugador. Como indica la alocución latina GUSTIBUS NON DISPUTADUM, es inútil buscar determinar las preferencias de cada individuo. Más bien, podemos buscar características comunes de todas las múltiples relaciones de preferencia. Ahora bien, sobre un conjunto O se pueden definir $2^{|O|^2}$ relaciones distintas. No todas ellas son interesantes, por lo que le impondremos a las relaciones de preferencia tres características: que sean completas, reflexivas y transitivas. Discutiremos cuán naturales estas resultan con el objetivo de modelar los juegos.

Asunción 2.3.1 (Completez) *Una relación $\succeq_i$ se dice completa si para todo par de resultados x, y en O se cumple que $x \succeq_i y$ o $y \succeq_i x$.*

Asunción 2.3.2 (Reflexión) *Una relación $\succeq_i$ se dice reflexiva si para todo resultado x en O se cumple que $x \succeq_i x$.*

Asunción 2.3.3 (Transitividad) *Una relación $\succeq_i$ se dice transitiva si para toda tripla de resultados x, y, z en O se cumple que si $x \succeq_i y \wedge y \succeq_i z$ entonces $x \succeq_i z$.*

Estas tres asunciones nos permite que decir que el copo (conjunto parcialmente ordenado)[1] dado por $(O, \succeq)$ es en realidad un retículo. Esta estructura algebraica es de bastante utilidad y practicidad. Sin embargo, para obtenerla podemos sacrificar la naturalidad de las asunciones. La reflexividad surge naturalmente. Una persona expuesta a elegir entre dos decisiones que resultan ser la misma prefiere trivialmente cualquiera de ellas. Sin embargo, tanto la completez como la transitividad resultan contraintuitivas. La completez implica que dadas dos decisiones cualesquiera, estamos dispuestos a preferir una sobre otra. Decía C. Spurgeon, "entre dos males no elijas ninguno". Es así ambicioso pretender que las relaciones de preferencia son completas. En contra de la transitividad tenemos varios ejemplos en la naturaleza. Uno de ellos es el juego de piedra, papel o tijera. Entre sacar piedra o papel, se prefiere papel. Entre papel y tijera, se prefiere tijera. Sin embargo preferir tijera ante piedra es ilógico.

Una vez asumido el conjunto de resultados como un copo, conviene representar la relación de preferencia de una manera computable. Para ello, desearíamos poder transferir la información de la relación de orden a un contexto calculable. Hacemos así uso de la relación de orden $\geq$ de los reales (sencillamente calculable), y mediante una función de utilidad isotona, representamos el orden $\succeq$ de O.

Definición 2.4 (Función de utilidad sobre resultados) *Sea O un conjunto de resultados junto con $\succeq$ una relación de preferencia completa, reflexiva, y transitiva. Una función $u : O \to R^n$ es llamada una función de utilidad que representa a $\succeq$ si para todo $x, y \in O$,*

$$x \succeq y \quad \Leftrightarrow \quad u(x) \geq u(y).$$

2.2. Preferencia sobre loterías

Ahora bien, los resultados de un juego (representados en O) pueden no ser únicamente elección del jugador, o estar sujetos a incertidumbre. Se pueden agrupar en loterias; es decir, se puede dotar a un conjunto de resultados de una medida de probabilidad. En tal caso, la relación de preferencia se espera que dependa de estos valores de probabilidad. Por ejemplo, es intuitivo que un jugador prefiera ganar 50 millones de dólares antes que ganar 49 millones de dólares. Sin embargo, se preferiría ganar 49 millones de dólares con 0.999 de probabilidad, que ganar 50 millones de dólares con probabilidad 0.001. En esta sección buscaremos reconciliar la noción de preferencia sobre resultados al añadir una medida de probabilidad.

Definición 2.5 (Lotería) *Sea $\{A_k\}_{k=1}^m$ un conjunto de resultados y sea $\{p_k\}_{k=1}^m$ un conjunto de reales no negativos tales que $\sum_{k=1}^m p_k = 1$. Denotamos la loteria L en la que el resultado A_k tiene probabilidad p_k como*

$$L = [p_1(A_1), \ldots, p_k(A_k)]$$

[1]En realidad para que $(O, \succeq)$ sea un copo se necesita adicionalmente que la relación $\succeq$ sea antisimétrica. Esto no se da, toda vez que la relación de indiferencia no es siempre trivial. En el sentido estricto podemos definir el copo generado por $(O, \succeq)$ como el copo $(O/\approx, \succeq)$ donde $O/\approx)$ es el conjunto de las clases de equivalencia generadas por $\approx$ sobre O.

Análogamente al caso de resultados, podemos definir el conjunto de loterías $\mathcal{L}$ y dotarlo con una relación de preferencia representable en la función.

Definición 2.6 (Función de utilidad sobre loterías) *Sea $\succeq_i$ una relación de preferencia para el jugador i sobre el conjunto de loterías $\mathcal{L}$. Una función $u_i : L \to R^n$ es llamada una función de utilidad que representa a $\succeq_i$ si para todo $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$,*

$$L_1 \succeq_i L_2 \quad \Leftrightarrow \quad u_i(L_1) \geq u_i(L_2).$$

El estudio de las relaciones de preferencia se reduce entonces al estudio de las funciones de utilidad. Un tipo de función que se comporta bien son las funciones lineales. Es decir, aquellas donde la probabilidad inherente de la lotería y las funciones de utilidad de los resultados determinan la función de utilidad de la lotería.

Definición 2.7 (Linealidad) *Una función de utilidad sobre loterías u_i se dice lineal si para cada lotería $L = [p_1(A_1), \ldots, p_k(A_k)]$ se tiene que*

$$u_i(L) = p_1 u_i(A_1) + \cdots p_k u_i(A_k).$$

3. Juegos en forma extensiva

Tenue rey, sesgo alfil, encarnizada
reina, torre directa y peón ladino
sobre lo negro y blanco del camino
buscan y libran su batalla armada.

No saben que la mano señalada
del jugador gobierna su destino,
no saben que un rigor adamantino
sujeta su albedrío y su jornada. [2]

Habiendo establecido formalmente las relaciones de preferencia, continuamos con el objetivo de definir la noción de juego. Para ello realizaremos un modelo que ampliaremos con el fin de captar la mayor cantidad de información de los fenómenos que en la sección 1 quisimos modelar como juegos. Haremos uso de la representación extensiva. Es decir, de un árbol donde se pueda seguir momento a momento las interacciones de los jugadores.

3.1. Definición y componentes básicos

Necesitamos, para comenzar, un conjunto de jugadores. Le pedimos que sea finito, pues desearíamos tener un tiempo finito de juego. Ellos interactuarán en el juego tomando decisiones en varias configuraciones del juego. Conviene representar estas posiciones e interacciones como un árbol. Cada decisión de un jugador se representa una arista entre el vértice que representa la posición actual y el vértice que representa la posición consecuencia de tal decisión. Este árbol, conocido como árbol de juego, engloba las acciones válidas del juego, codificadas en las transiciones válidas entre posiciones. Además este árbol debe tener una raíz que represente la posición inicial del juego. Cabe destacar que el número de vértices del árbol no corresponde con el número de posiciones posibles en el juego en general, pues dos configuraciones iguales del juego pueden ser alcanzadas por decisiones distintas, y así corresponder a vértices distintos en el árbol. La idea del árbol de juego es extraer las transiciones entre posiciones, y además el transcurso histórico del juego. Además es necesario en cada vértice que no es una hoja (pues las hojas representan el final del juego) establecer quién toma cada una de las decisiones. Es decir, estos vértices pueden ser particionados en tantas clases como jugadores en el juego. Adicionalmente, existen un conjunto de posibles resultados del juego, por ejemplo, ganar, perder o pagar 23 dólares. Estos se hacen corresponder con los finales posibles del juego mediante una función, de modo que dada una posición final, sabemos qué resultado le corresponde. El anterior modelo describe cómodamente las interacciones que buscamos modelar. Presentamos esta respuesta parcial en la siguiente definición.

Definición 3.1 (Juego) *Un juego en forma extensiva es un vector*

$$\Gamma = (N, V, E, x^0, (V_i)_{i \in N}, O, u)$$

donde:

- N *es el conjunto finito de jugadores*
- (V, E, x^0) *es el árbol llamado árbol del juego.*
- $(V_i)_{i \in N}$ *es una partición del conjunto de vértices que no son hojas.*
- O *son los posibles resultados del juego.*
- u *es una función que le asocia a cada hoja del árbol un resultado de* O

La ventaja de la representación extensiva es que se exhiben explícitamente las jugadas y posibilidades del juego. Este modelo es suficientemente rico para explorar otras nociones asociadas a los juegos, como lo son sus estrategias. sin embargo, este objeto puede tornarse complicado de describir. Por ejemplo, en el caso del ajedrez, la raíz corresponde a la clase de movimientos del jugador blanco y de ella salen 20 aristas. Por cada uno de esos 20 vértices hijos surgen 20 vértices más en la segunda generación correspondientes a la respuesta de las negras. Este árbol resulta ser intrincado.

3.2. Estrategias

Escuetamente, decimos que una estrategia es una forma específica de actuar en un juego. Aquel jugador con una estrategia tiene una predilección clara en cada vértice del árbol donde deba tomar una decisión.

Definición 3.2 (Estrategia) *Una estrategia para el jugador i es una función* s_i *que envía cada vértice* $x \in V_i$ *a un elemento en* $C(x)$*, el conjunto de todos los hijos del vértice* x*.*

Conviene generalizar esta noción a todos los jugadores, obteniendo un vector de estrategias.

Definición 3.3 (Vector de estrategias) *Un vector de estrategias es una lista de estrategias* $s = (s_i)_{i \in N}$*, una para cada jugador.*

Gracias a este lenguaje podemos hablar de estrategias ganadoras. Es decir, aquellas formas de moverse entre posiciones que garantiza un triunfo. Hallar este tipo de estrategias suele ser un problema complicado y suele depender fuertemente de la estructura de cada juego.

Definición 3.4 (Tipos de estrategias) *Sea* Γ *un juego en forma extensiva con* $N = \{jugadorI, jugadorII\}$ *cuyo conjunto de resultados es* $O = \{I\,gana, II\,gana, Empate\}$*. Una estrategia* s_I *del jugador I se dice estrategia ganadora si*

$$u(s_I, s_{II}) = I\,gana \quad \forall s_{II} \text{ estrategia de } II$$

3.3. Juegos con azar

Una particularidad que no hemos considerado hasta ahora es la acción del azar dentro del juego. Si bien los jugadores pueden moverse entre posiciones con sus acciones, algunas de estas transiciones también podrían ser causadas por la suerte. Así es necesario añadir un nuevo jugador al que notaremos con 0. Este corresponde al azar y se comporta como un jugador adicional, solo que, en los hijos de los vértices de su clase de equivalencia se define un espacio de probabilidad que caracteriza lo que equivaldría a la toma de decisiones en los demás jugadores. Decidimos así expandir nuestro modelo.

Definición 3.5 (Juego) *Un juego en forma extensiva es un vector*

$$\Gamma = (N, V, E, x^0, (V_i)_{i \in N \cup \{0\}}, (p_x)_{x \in V_0}, O, u)$$

donde:

- N *es el conjunto finito de jugadores*
- (V, E, x^0) *es el árbol de juego*
- $(V_i)_{i \in N \cup \{0\}}$ *es una partición del conjunto de vértices que no son hojas*
- *Para cada vértice* $x \in V_0$*,* p_x *es una distribución de probabilidad sobre las aristas que surgen de* x*.*
- O *son los posibles resultados del juego.*
- u *es una función que le asocia a cada hoja del árbol un resultado de* O*.*

Para el caso determinista, simplemente puede considerarse que la clase de vértices del jugador 0 es vacía. Note que para los vértices de 0, la transición a los hijos está claramente determinada. Para los demás jugadores existen las posibilidades de paso descritas por E, pero no se tiene mayor certeza sobre estos criterios de selección, y en principio, cualquier estrategia es válida.

3.4. Información imperfecta

Es momento de hacer una distinción importante en los juegos. Si bien existe el árbol de juego, es probable que este no sea conocido completamente por el otro jugador. En varios juegos, como el poker, los jugadores no tienen acceso a toda la información del juego. Puede que logren identificar la configuración actual del juego, pero no la cadena de jugadas que ha llevado a estar en un vértice específico, o las opciones que los demás jugadores poseen. Esta incapacidad se conoce como información imperfecta y se refleja matemáticamente en la construcción de clases de equivalencia sobre los vértices de decisión de un jugador impulsada por imposibilidad de determinar con claridad el vértice correspondiente al momento observado. Como el jugador no puede distinguir el historial del juego, es necesario que en todos los elementos x de la clase cuente con las mismas acciones $A(x)$ para que pueda elegir una estrategia compatible con sus incertidumbres. La noción de certeza sobre el juego se clarifica introduciendo los conjuntos de información.

Definición 3.6 (Conjunto de información) *Sea*

$$\Gamma = (N, V, E, x^0, (V_i)_{i \in N \cup \{0\}}, (p_x)_{x \in V_0}, O, u)$$

un juego en forma extensiva. Un conjunto de información del jugador i *es una pareja* $(U_i, A(U_i))$ *tal que*

- $U_i = \{x_i^1, \ldots, x_i^j\}$ *es un subconjunto de* V_i *que satisface que en cada vértice en* U_i *para el jugador* i *se tiene* $|A(x_i^j)| = l_i$*, para* $j = 1, \ldots, m$
- $A(U_i)$ *es una partición de las* ml_i *aristas* $\bigcup_{j=1}^m A(x_i^j)$ *en* l_i *conjuntos disyuntos, cada uno de los cuales contiene un elemento de los conjuntos* $(A(x_i^j))_{j=1}^m$.

Al añadirle al modelo anterior los conjuntos de información obtenemos un modelo robusto que nos permite comprender y describir lo que intuitivamente llamamos juego.

Definición 3.7 (Juego) *Un juego en forma extensiva es un vector*

$$\Gamma = (N, V, E, x^0, (V_i)_{i \in N \cup \{0\}}, (p_x)_{x \in V_0}, (U_i^j)_{i \in N}^{j=1,\ldots,k_i}, O, u)$$

donde:

- N *es el conjunto finito de jugadores.*
- (V, E, x^0) *es el árbol de juego.*
- $(V_i)_{i \in N \cup \{0\}}$ *es una partición del conjunto de vértices que no son hojas.*
- *Para cada vértice* $x \in V_0$*,* p_x *es una distribución de probabilidad sobre las aristas que surgen de* x.
- *Para cada jugador* $i \in N$*,* $(U_i^j)^{j=1,\ldots,k}$ *es una partición de* V_i.
- *Para cada jugador* $i \in N$ *y cada* $j \in \{1, 2, \ldots, k_i\}$*, la pareja* $(U_i^j, A(U_i^j))$ *es un conjunto de información para el jugador* i.
- O *son los posibles resultados del juego.*
- u *es una función que le asocia a cada hoja del árbol un resultado de* O.

Obtenemos así un buen modelo para describir los juegos.

4. Juegos en forma estratégica

En su grave rincón, los jugadores
rigen las lentas piezas. El tablero
los demora hasta el alba en su severo
ámbito en que se odian dos colores.

Adentro irradian mágicos rigores
las formas: torre homérica, ligero
caballo, armada reina, rey postrero,
oblicuo alfil y peones agresores. [2]

Si bien la forma de describir los juegos de manera extendida ha sido bastante clara, la gran cantidad de componentes y la necesidad de especificar cada posibilidad en el grafo hace que sea pertinente buscar una manera más sintética y práctica de presentar los juegos. Surge así una segunda posibilidad. La de hacerlo de forma estratégica. Es decir, enfocándose en el accionar de cada jugador. Este acercamiento vincula además la noción de utilidad.

Definición 4.1 (Juego) *Un juego en forma estratégica es una tripla ordenada* $G = (N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N})$ *en la que:*

- $N = \{1, \ldots, n\}$ *es un conjunto finito de jugadores.*
- S_i *es el conjunto de estrategias del jugador* i*, para todo jugador* $i \in N$*.*
- $u_i : S \to R$ *es una función que le asocia a cada vector de estrategias* $s = (s_i)_{i \in N}$ *la utilidad* $u_i(s)$ *al jugador* i*, para cada jugador* $i \in N$*.*

donde S *el conjunto de todos los vectores de estrategias* $S = S_1 \times \cdots \times S_n$*.*

Concluímos destacando una propiedad de esta representación: su facilidad para describir juegos donde las decisiones se pueden llevar a cabo simultáneamente, y no consecutivamente, como en la forma extensiva. Además puede ser presentado en una matriz. Un ejemplo sencillo de esto es el juego piedra, papel o tijera, cuya representación es:

(0,0)	(1,-1)	(1,-1)
(1,-1)	(0,0)	(-1,1)
(-1,1)	(-1,1)	(0,0)

correspondiendo la primera fila/columna a la piedra, la segunda al papel, la tercera a la tijera con la utilidad 1 para un triunfo, 0 para un empate y -1 para una derrota.

Concluimos así que existen dos buenos modelos que describen adecuadamente a los juegos. Utilizan objetos de la teoría de grafos y responden a nuestras preguntas desde dos paradigmas distintos. La forma extensiva, desde el imperativo; la forma estratégica desde el declarativo.

También el jugador es prisionero
(la sentencia es de Omar) de otro tablero
de negras noches y de blancos días.

Dios mueve al jugador, y éste, la pieza.
¿Qué Dios detrás de Dios la trama empieza
de polvo y tiempo y sueño y agonía? [2]

5. Referencias

[1] Maschler, M., Solan, E., Zamir, S. Game Theory. Cambridge: Cambridge University Press. 2013.

[2] Borges, J.L. El Hacedor. Emecé Editores. *Ajedrez.* 1960